

# Preparatoria #3:

## Problemas

**P9.1** En el circuito de la figura P9.1a, que está en régimen estacionario sinusoidal, se conocen las formas de onda de tensión e intensidad mostradas en la figura P9.1b.

Determinar  $R$ ,  $C$  y el valor eficaz de la intensidad  $i(t)$ .

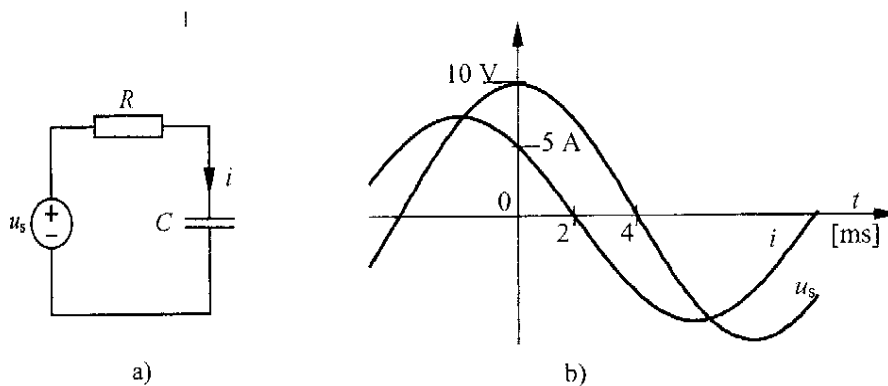


Figura P9.1

**P9.2** El circuito de la figura P9.2 está en régimen estacionario sinusoidal. La pulsación es de  $1000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$  y se sabe que  $I$  vale  $5/\pi/4$  A, habiendo tomado como referencia de fases la tensión  $U$ . Hallar:

1. Las intensidades  $I_1$  e  $I_2$ . (Dibujar el diagrama vectorial)
2. La capacidad  $C$ .
3. El valor de la resistencia  $R$ , sabiendo que el voltímetro marca 20V.

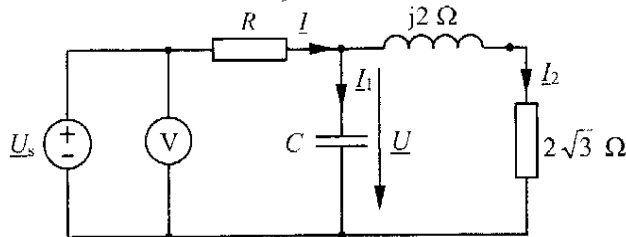


Figura P9.2

**P9.3** En el circuito de la figura P9.3, que está en régimen estacionario sinusoidal a una frecuencia de  $1000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ , se conocen las indicaciones de los amperímetros que son, respectivamente:

$$A_1 = 10 \text{ A}$$

$$A_2 = 6 \text{ A}$$

También se sabe que la impedancia de la rama 1 tiene un argumento de  $\pi/4$ . Tomando como origen de fases la tensión  $\underline{U}$ , determinar el valor de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R$  y  $\theta_s$ .

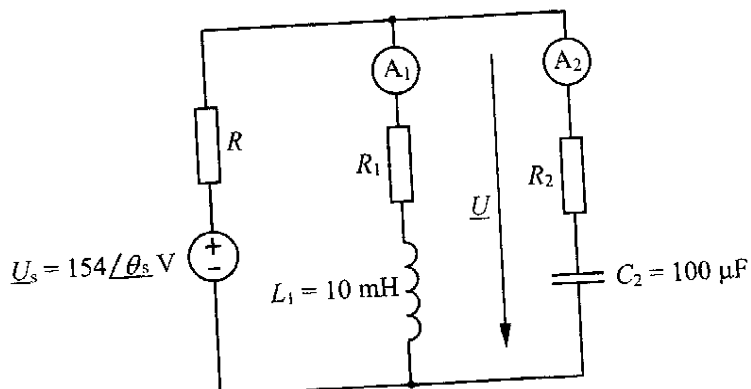


Figura P9.3

**P9.4** En el circuito de la figura P9.4, que se encuentra en régimen estacionario sinusoidal, las indicaciones de los amperímetros, que se suponen ideales, son las siguientes:

$$A_1 = 5 \text{ A}$$

$$A_2 = 3 \text{ A}$$

El dipolo D es de carácter resistivo, y se desea conocer:

- Valor de la resistencia equivalente del dipolo D.
- Diagrama vectorial de las tensiones en las impedancias  $\underline{Z}_1$ ,  $\underline{Z}_2$  y en el dipolo D. (Tomar  $\underline{I}_2$  como origen de fases).
- Valor de la intensidad  $\underline{I}$  y de la tensión  $\underline{U}_s$ .

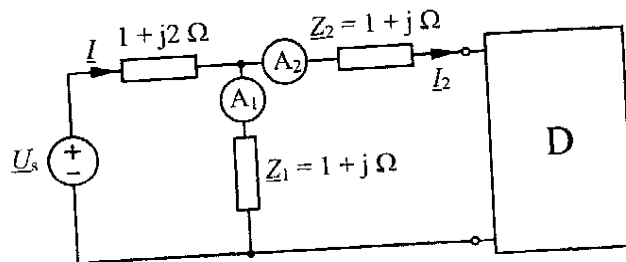


Figura P9.4

**P9.5** Las indicaciones de los voltímetros en el circuito de la figura P9.5, que está en régimen estacionario sinusoidal, son las siguientes:

### Soluciones de los problemas

**SP 9.1** De las formas de onda de la figura P9.1a se deduce que el periodo  $T$  de las funciones sinusoidales es 16 ms. Las fases iniciales de  $u_s(t)$  e  $i(t)$ , tomando como base la función coseno, son 0 y  $\pi/4$  rad, respectivamente. Si se tiene en cuenta que  $\omega = 2\pi/T = 125\pi$ , se obtienen, para estas variables, las expresiones siguientes

$$\begin{aligned} u_s(t) &= 10\cos(125\pi t) \text{ V} \\ i(t) &= I\sqrt{2}\cos(125\pi t + \pi/4) \text{ A} \end{aligned} \quad [9.118]$$

En este último caso, según la figura P9.1b, para  $t = 0$ ,  $i(0) = 5$ , y al sustituir valores en la ecuación [9.118] se tiene como valor eficaz de  $i(t)$ ,  $I = 5$  A.

Los complejos asociados a estas funciones sinusoidales son

$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= 10\angle 0 \text{ V} \\ \underline{I} &= 5\sqrt{2}\angle \pi/4 \text{ A} \end{aligned}$$

donde se ha tomado como módulo el valor de cresta o amplitud de las funciones sinusoidales.

La impedancia de entrada del dipolo constituido por la asociación serie de la resistencia y el condensador es

$$\underline{Z} = \underline{U}_s / \underline{I} = \sqrt{2}\angle -\pi/4 = 1 - j\Omega = R - j\frac{1}{\omega C}$$

y de aquí resulta  $R = 1 \Omega$ ,  $C = 1/(125\pi) = 2,55$  mF.

### SP 9.2

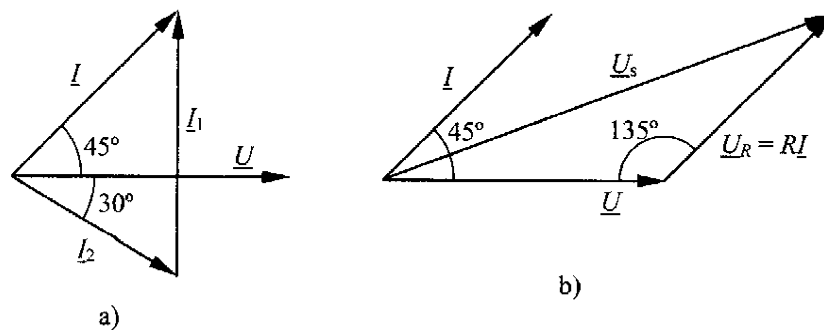


Figura SP 9.2

1.- La intensidad  $I_1$  adelanta  $\pi/2$  a  $\underline{U}$  al ser una rama capacitiva pura.

La impedancia de la rama formada por la asociación serie de la bobina y la resistencia,  $\underline{Z}_2$ , es

$$\underline{Z}_2 = 2\sqrt{3} + j2 \Omega = 4/\pi/6 \Omega$$

por lo que la intensidad  $I_2$  retrasa  $30^\circ$  a la tensión  $\underline{U}$ .

Al tomar como origen de fases la tensión  $\underline{U}$  se puede dibujar el diagrama vectorial mostrado en la figura SP 9.2a donde se hace patente el cumplimiento de la ecuación correspondiente a la primera ley de Kirchhoff

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad [9.119]$$

Las tres intensidades forman un triángulo en el que se conoce como dato la dirección y longitud de uno de los lados (el correspondiente a  $\underline{I}$ ), y la dirección de los otros dos (correspondientes a  $\underline{I}_1$  e  $\underline{I}_2$ ).

A la vista del diagrama se puede escribir la ecuación [9.119] de forma desarrollada como

$$\frac{5}{\sqrt{2}}(1 + j) = jI_1 + \frac{1}{2}I_2(\sqrt{3} - j)$$

lo que constituye una ecuación en números complejos que se desdobra en dos con números reales al tomar parte real y parte imaginaria sucesivamente en ambos lados de la misma. Una vez resuelta se obtiene  $I_1 = 5,577$  A,  $I_2 = 4,082$  A, lo que da lugar a los complejos

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= j5,577 \text{ A} \\ \underline{I}_2 &= 4,082/\underline{-\pi/6} \text{ A} = 3,536 - j2,041 \text{ A} \end{aligned}$$

2.- Una vez conocida la intensidad  $I_1$  se determina la tensión  $\underline{U}$  mediante la relación

$$\underline{U} = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = 4/\pi/6 \cdot 4,083/\underline{-\pi/6} = 16,33/\underline{0} \text{ V}$$

y conocida  $I_1$  se determina la capacidad del condensador ya que

$$\omega C = \frac{I_1}{U} = 0,3415 \text{ S}$$

y, para  $\omega = 1000 \text{ rad.s}^{-1}$ , resulta  $C = 0,3415 \text{ mF}$ .

3.- Para la malla izquierda del circuito se tiene, al aplicar la segunda ley de Kirchhoff,

$$\underline{U}_s = RI + \underline{U}$$

Esta ecuación da lugar al diagrama vectorial de la figura SP 9.2b en el que las tensiones forman un triángulo con un lado conocido en dirección y magnitud (el correspondiente a la tensión  $\underline{U}$ ), otro lado cuya dirección es conocida (el correspondiente a la tensión  $\underline{U}_R = RI$ ) y, el tercero, en el que se conoce su longitud,  $U_s = 20$  V. Si se aplica el teorema del coseno, se obtiene

$$U_s^2 = U^2 + U_R^2 - 2U \cdot U_R \cdot \cos(135^\circ)$$

que es una ecuación con una sola incógnita:  $U_R$ . Una vez resuelta se obtiene  $U_R = RI = 4,783$  V y, de aquí, al ser ya conocida  $I$ , se determina el valor de la resistencia:  $R = 0,957 \Omega$ .

## SP 9.3

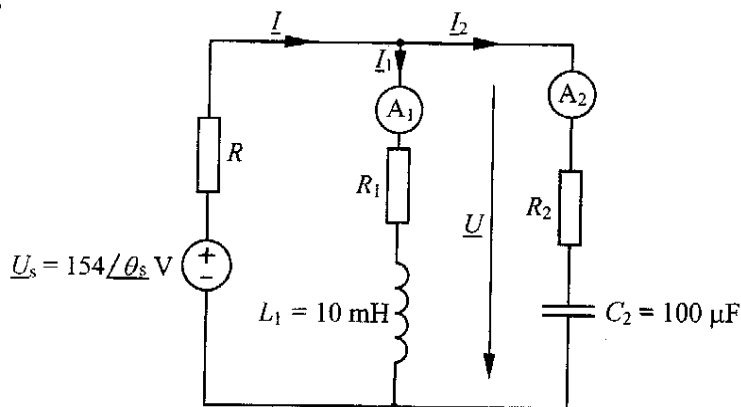


Figura SP 9.3

La impedancia de la asociación serie de la resistencia  $R_1$  y la bobina de 10 mH,  $\underline{Z}_1$ , está definida porque al conocerse el argumento,  $\varphi_1 = \pi/4$ , se puede escribir

$$X_1 = R_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 = R_1$$

donde  $R_1 = X_1 = \omega L_1 = 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 10 \Omega$ . Es decir,

$$\underline{Z}_1 = 10 + j10 \Omega = 10\sqrt{2} \angle \pi/4 \Omega$$

Con este resultado se puede determinar el módulo de la tensión compleja  $\underline{U}$ , ya que al ser

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \cdot I_1$$

tomando módulos a ambos lados de esta igualdad, resulta

$$U = Z_1 I_1 = 10\sqrt{2} \cdot 10 = 100\sqrt{2} \text{ V}$$

Si se toma como origen de fases la tensión  $\underline{U}$ , se tiene

$$\underline{U} = 100\sqrt{2} \angle 0 \text{ V}$$

Una vez conocida la tensión  $U$  se puede determinar la impedancia de la asociación serie de la resistencia  $R_2$  y del condensador de  $100 \mu\text{F}$ ,  $\underline{Z}_2$ , ya que al ser

$$\underline{U} = \underline{Z}_2 I_2$$

se puede determinar el módulo de la impedancia  $\underline{Z}_2$  como

$$Z_2 = U/I_2 = 100\sqrt{2}/6 = 50\sqrt{2}/3 \Omega$$

A continuación se determina el valor de  $R_2$ , ya que

$$R_2 = \sqrt{Z_2^2 - X_2^2} \quad [9.120]$$

donde  $X_2 = -\frac{1}{\omega C_2} = -\frac{1}{1000 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -10 \Omega$ . Si se sustituyen los valores de  $Z_2$  y  $X_2$  en la ecuación [9.120] se obtiene  $R_2 = 21,344 \Omega$ . La impedancia compleja  $\underline{Z}_2$  es, por tanto,

$$\underline{Z}_2 = 21,344 - j10 \Omega = 50\sqrt{2}/3 \angle -25,104^\circ \Omega$$

Una vez determinadas las impedancias complejas  $\underline{Z}_1$  y  $\underline{Z}_2$  y conocida la tensión  $\underline{U}$  se pueden determinar las intensidades complejas  $\underline{I}_1$  e  $\underline{I}_2$

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{U}/\underline{Z}_1 = 10 \angle -\pi/4 = (10 - j10)/\sqrt{2} = 7,071 - j7,071 \text{ A} \\ \underline{I}_2 &= \underline{U}/\underline{Z}_2 = 6 \angle 25,104^\circ \text{ A} = 5,433 + j2,546 \text{ A} \end{aligned}$$

y, a partir de ellas, mediante la primera ley de Kirchhoff, se calcula la intensidad  $I$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 12,504 - j4,525 \text{ A} = 13,298 \angle -19,896^\circ \text{ A}$$

Para la fuente real de tensión se puede escribir la ecuación

$$\underline{U}_s = R\underline{I} + \underline{U}$$

que, desarrollada, adopta la forma

$$154 \angle \theta_s = R(12,504 - j4,525) + 100\sqrt{2} \quad [9.121]$$

donde al tomar módulos a ambos lados de la igualdad resulta una ecuación en  $R$ , de la que se obtiene  $R = 1 \Omega$ . Si se sustituye este valor en la ecuación [9.121] se halla  $\theta_s = -1,684^\circ$ .

## SP 9.4

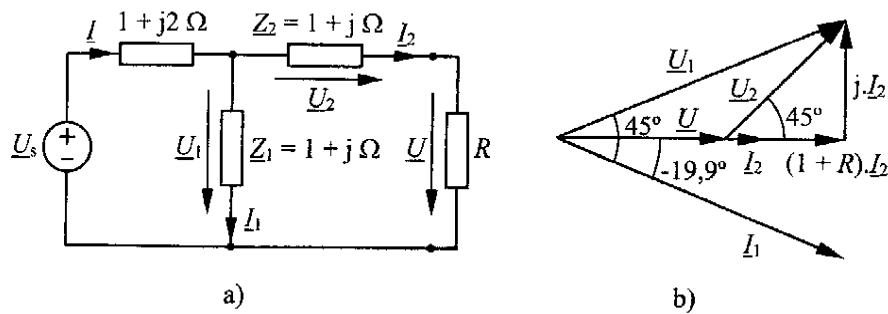


Figura SP 9.4

a) En la figura SP 9.4 se representa el circuito en estudio con las referencias de polaridad de las tensiones e intensidades. Mediante la segunda ley de Kirchhoff se puede escribir, de acuerdo con la figura SP 9.4a

$$\underline{Z}_1 \cdot \underline{I}_1 = (\underline{Z}_2 + R) \underline{I}_2 = (1 + R + j) \underline{I}_2$$

y tomando módulos a ambos lados de la igualdad resulta

$$\sqrt{2} \cdot 5 = \sqrt{(1 + R)^2 + 1} \cdot 3$$

de donde se deduce  $R = 1,134 \Omega$ .

b) Si se toma  $\underline{I}_2$  como origen de fases,  $\underline{I}_2 = 3 \angle 0^\circ$  A, se tiene

$$\underline{U} = R \underline{I}_2 = 3,403 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{I}_2 = 4,243 \angle 45^\circ \text{ V}$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{U} = 7,071 \angle 25,104^\circ \text{ V}$$

con lo que se puede dibujar el diagrama de tensiones de la figura SP 9.4b

c) Como también

$$\underline{U}_1 = (1 + j) \underline{I}_1$$

se obtiene

$$\underline{I}_1 = 5 \angle -19,896^\circ \text{ A} = 4,702 - j1,702 \text{ A}$$

En la figura SP 9.4b se muestra un diagrama con las tensiones de la malla derecha del circuito, y las intensidades  $\underline{I}_1$  e  $\underline{I}_2$  para mostrar la posición relativa de las diferentes magnitudes.

Mediante la primera ley de Kirchhoff se calcula la intensidad  $\underline{I}$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 7,702 - j1,702 \text{ A}$$

Finalmente, mediante la segunda ley de Kirchhoff, se obtiene la tensión de la fuente

$$\underline{U}_s = (1 + j2)\underline{I} + \underline{U}_1 = 17,508 + j16,702 \text{ V} = 24,196 \angle 43,650^\circ \text{ V}$$

**SP 9.5**

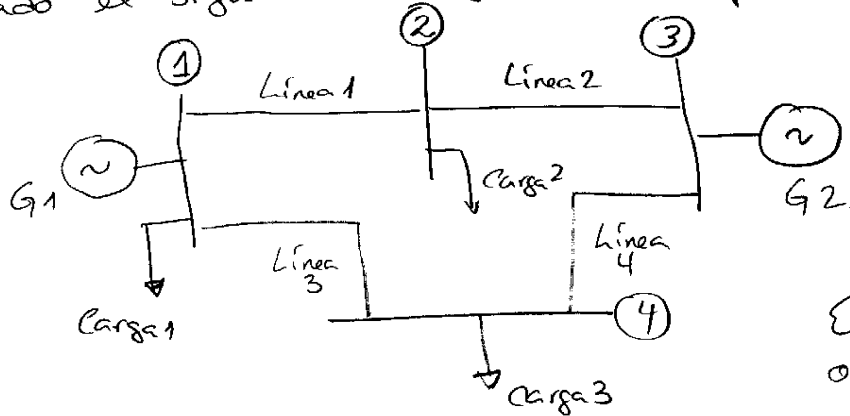


# Preparatoria #4

Verónica Zapate

(1)

Dado el siguiente diagrama unifilar:



El sistema se encuentra operando en RPS @  $f = 60\text{Hz}$

Datos:

G1:  $u_{g1}(t) = 500\sqrt{2} \cos \omega t \text{ V}$   
 $R_g = 1\text{m}\Omega$ ;  $L_g = 1\text{mH}$

G2:  $u_{g2}(t) = 510\sqrt{2} \cos(\omega t + 10^\circ) \text{ V}$   
 $R_g = 0$ ;  $L_g = 1\text{mH}$

Línea 1 = Línea 2:  $\dot{Z}_L = 0,1 + j0,6 \Omega$

Línea 3 = Línea 4:  $X_L = 1 \Omega$

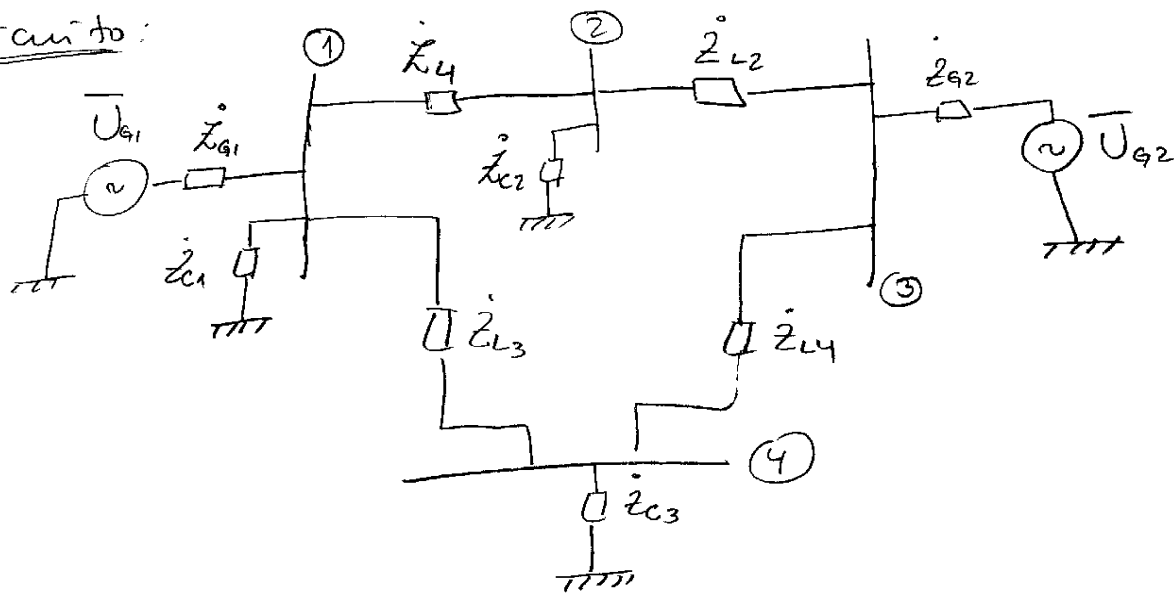
Carga 1 = Carga 3:  $R_{c1} = 300 \Omega$ ;  $L_{c1} = 2 \text{H}$ .

Carga 2:  $\dot{Z}_{c2} = 1000 \Omega + j300 \Omega$

Determinar:

- 1: obtener la matriz de admitancia nodal del sistema.
- 2: obtener las tensiones en todos los nodos del sistema.
- 3: Determine la corriente que circula por la línea 1.
- 4: Compruebe el balance de corrientes en el nodo 2
- 5: Dibuje el diagrama fasorial de la tensión y la corriente que circula por la carga conectada en el nodo 2.
- 6: Determine ~~la impedancia~~ el equivalente Thévenin de la barra ②

Circuito:



$$\bar{U}_{G1} = 500 \angle 0^\circ \text{ V} ; \dot{Z}_{G1} = 0,001 + j0,377 \Omega$$

$$\bar{U}_{G2} = 510 \angle 0^\circ \text{ V} ; \dot{Z}_{G2} = j0,377 \Omega$$

$$\dot{Z}_{L1} = \dot{Z}_{L2} = 0,1 + j0,6 \Omega$$

$$\dot{Z}_{L3} = \dot{Z}_{L4} = j1 \Omega$$

$$\dot{Z}_{C1} = \dot{Z}_{C3} = 300 + j754 \Omega$$

$$\dot{Z}_{C2} = 1000 + j300 \Omega$$

$[Y_{BUS}] \rightarrow$  matriz dimensionada  $4 \times 4$

$[Y_{BUS}] =$

$0,2778 - j5,2752$	$-0,2703 + j1,6216$	$0$	$j1$
	$0,5415 - j3,2435$	$-0,2703 + j1,6216$	$0$
		$0,2703 - j5,2741$	$j1$
			$0,0005 - j2,0011$

25

$$Y_{11} = \frac{1}{Z_{G1}} + \frac{1}{Z_{E1}} + \frac{1}{Z_{L1}} + \frac{1}{Z_{L3}} = 0,2778 - j 5,2752 \text{ } \Omega^{-1}$$

$$Y_{22} = \frac{1}{Z_{L1}} + \frac{1}{Z_{L2}} + \frac{1}{Z_{E2}} = 0,5415 - j 3,2435 \text{ } \Omega^{-1}$$

⋮  
⋮

El vector de corrientes de Norton, puede ser obtenido de la siguiente manera:

$$\bar{I}_{NG1} = \frac{\bar{U}_{G1}}{Z_{G1}} = \frac{500 \angle 0^\circ \text{ V}}{(0,001 + j0,377) \Omega} = \boxed{1326,2553 \angle -89,84^\circ \text{ A}}$$

↘ 0,377  $\angle 89,84^\circ \Omega$

$$\bar{I}_{NG2} = \frac{\bar{U}_{G2}}{Z_{G2}} = \frac{510 \angle 10^\circ}{0,377 \angle 90^\circ} = \boxed{1352,7852 \angle -80^\circ \text{ A}}$$

$$[\bar{I}_N] = \begin{bmatrix} \bar{I}_{NG1} \\ 0 \\ \bar{I}_{NG2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solución del problema se obtiene de:

$$[\bar{V}] = [Y_{BUS}]^{-1} [\bar{I}_N]$$

$$[\bar{V}] = \begin{bmatrix} 499,6667 \angle 2,51^\circ \\ 502,8018 \angle 5,01^\circ \\ 507,0237 \angle 7,51^\circ \\ 502,5787 \angle 5,02^\circ \end{bmatrix} \checkmark$$

↑ Como se observa, todas las tensiones se encuentran cerca de las tensiones internas de los generadores, concluyéndose que el sistema está operando en buenas condiciones, desde ese pto de vista.

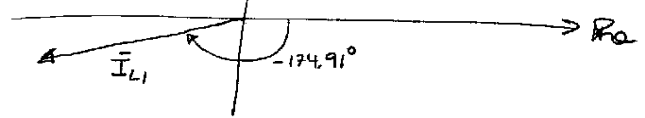
La corriente que circula por la línea 1, puede ser obtenida, como:

$$\bar{I}_{L1} = \frac{\bar{V}_1 - \bar{V}_2}{\bar{Z}_{L1}} = \frac{499,6667 \angle 35^\circ \text{ V} - 502,8018 \angle 5,01^\circ \text{ V}}{(0,1 + j0,6) \Omega}$$

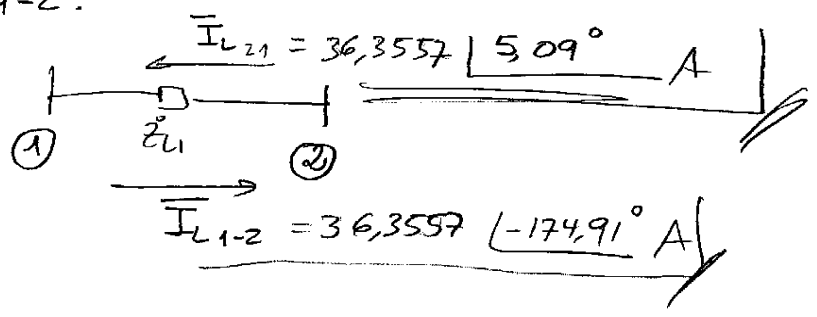
$$\rightarrow 0,6083 \angle 80,54^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_{L1} = 36,3557 \angle -174,91^\circ \text{ A}$$

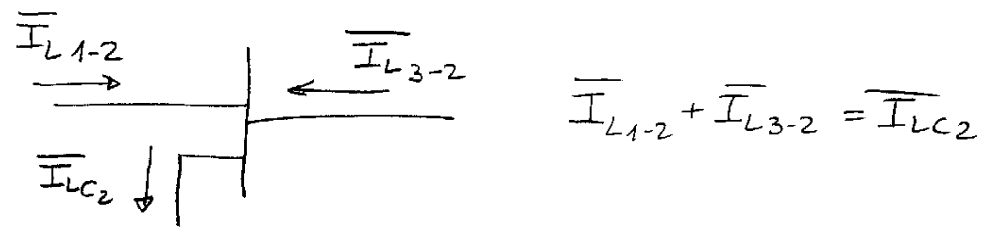
que significa este ángulo  $\bar{I}_{L1-2}$



Esto quiere decir que realmente dadas las magnitudes de los fasores de  $\bar{V}_1$  y  $\bar{V}_2$ , la corriente está circulando en el sentido 2-1 y no 1-2.



El balance de corrientes (Kirchoff) en el nodo 2:



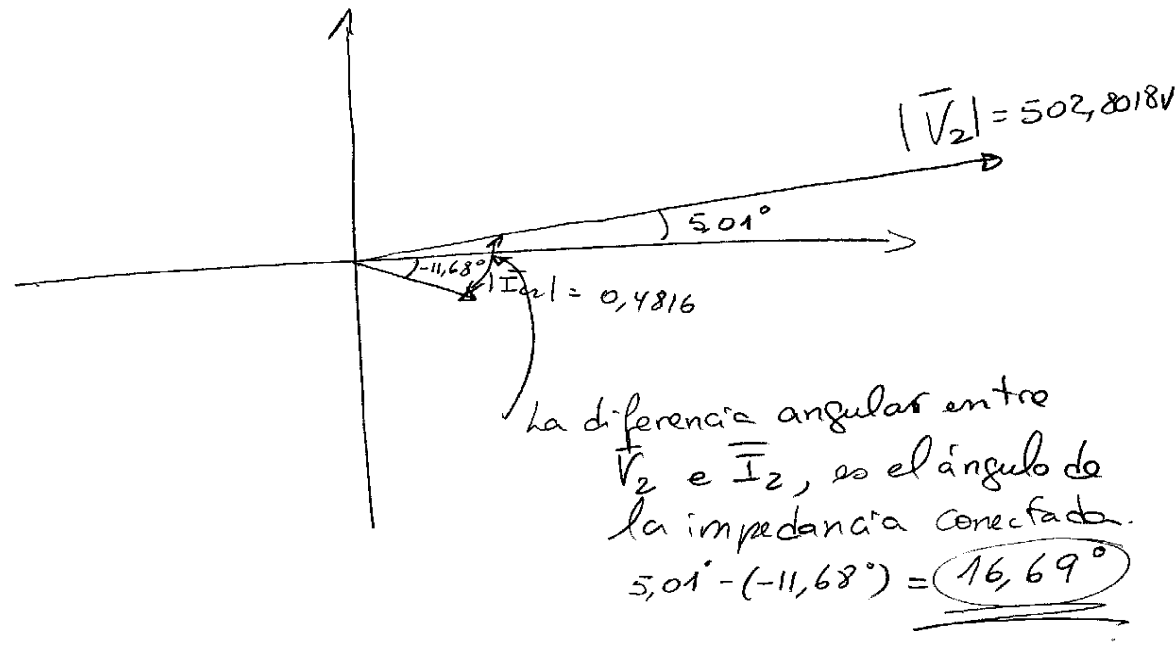
$$\bar{I}_{L1-2} = 36,3557 \angle -174,91^\circ \text{ A} \quad ; \quad \bar{I}_{L3-2} = \frac{\bar{V}_3 - \bar{V}_2}{\bar{Z}_{L2}} = 36,8171 \angle 4,87^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I}_{L1-2} + \bar{I}_{L3-2} = 0,4816 \angle -11,68^\circ \text{ A} \quad \leftarrow \text{son iguales.}$$

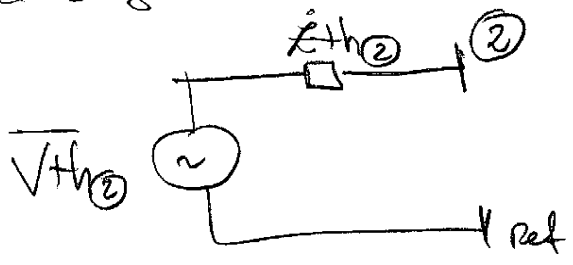
$$\bar{I}_{LC2} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_{C2}} = \frac{502,8018 \angle 5,01^\circ \text{ V}}{(1000 + j300) \Omega} = 0,4816 \angle -11,68^\circ \text{ A}$$

$$\leftarrow 1044,031 \angle 116,20^\circ \Omega$$

# Diagrama fasorial :



El equivalente Thévenin de la barra ②, se obtiene de la siguiente manera:



El voltaje de Thévenin, corresponde directamente a la tensión calculada en las condiciones actuales de la red, es decir,  $\bar{V}_{th②} = \bar{V}_② = 502,8018 \angle 5,01^\circ V$ .

y la  $\bar{Z}_{th②}$ , se obtiene de la  $[Y_{BUS}]^{-1} \Rightarrow$  del término de la posición 2-2  
 $\bar{Z}_{th②} = 0,4909 \angle 84,1^\circ \Omega = 0,0505 + j0,4883 \Omega$